グラフの頂点価格付け問題に対する実用的近似解法 (アルゴリズムと計算理論の新展開)

中村, 坂紀; 塩浦, 昭義

数理解析研究所講究録
第1799巻 2012年 157-158

2011年度冬のLAシンポジウム [S2]

グラフの頂点価格付け問題に対する実用的近似解法

中村 坂紀*　　塩浦 昭義†

1 問題の定義

食事処や家電量販店など, 何かを取引する場には商品を売りたい店側, 商品を買いたい消費者側という2つの立場が存在する. 店側が商品を高く売るために価格を高く設定すると, 消費者は購入を控えて売上個数が減少し, 総売上が減少する. たくさん売るために商品の価格を低く設定すると, 商品1つあたりの売上単価が減少し, 総売上が減少する. このように, 価格の付け方というのは店にとっての重要課題であり, 価格設定には高くも低くもない最適な価格を考える必要がある. このような問題を**価格付け問題**という.

頂点を商品, 辺を消費者の欲しい商品群としたハイパーグラフを考えた時, この問題は頂点に適切な価格を設定する問題として考えることができる. 本研究では商品は無限に販売可能であり, 消費者は1つの商品群にしか関心がないという仮定の下でハイパーグラフの頂点の最適な価格を求める**頂点価格付け問題**について考えていく.

本研究で扱う問題を数学的に記述する. 頂点価格付け問題では, n 個の商品 $i=1,2,\ldots,n$, m 人の消費者 $j=1,2,\ldots,m$, 各商品の価格を p_i, 各消費者の予算を w_j, 各消費者が欲しい商品の集合を $S_j\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, 集合 S の価格の総和を $p(S)=\sum_{i\in S}P_i$ として考えると, 頂点価格付け問題は次のように定式化される.

頂点価格付け問題

- 最大化: $\sum_{j:p(S_j)\leq w_i} p(S_j)$
- 条件: $p_i\geq 0$

1.1 既存研究

消費者が2つ以上の商品からなる商品群を購入したいと考えている問題に対し, Guruswami らは問題に対する $O(\log n+\log m)$ 近似多項式時間アルゴリズムを提案すと共に, この問題がAPX困難であることを示した [4]. Briest と Krysta は消費者が高々k個の商品しか欲しがっていない時の $O(k^2)$ 近似アルゴリズムを提案し [2], 後に Balcan と Blum によって $O(k)$ 近似アルゴリズムへと改良された [1]. Khandekar らは kが高々2に制限される時, UniqueGamesConjecture を仮定すると2未満近似はNP困難, 17/16未満近似は無条件でNP困難である事, 2部グラフの場合においてもAPX困難であることを示した [5]. また, Balcan と Blum は2部グラフの2近似アルゴリズムを拡張した, kが高々2の時の4近似アルゴリズムも示している [1].

1.2 本論文の目的

頂点価格付け問題はAPX困難であるため, 多項式時間で最適解を求めることは絶望的であり, 既存の近似アルゴリズムの精度も実用的には良くはなさそうである. そのため, 本論文では, 高速に実用的な解を得るアルゴリズムの提案を行う.

2 整数計画問題への定式化

アルゴリズムによって得られた解の精度を評価するためには最適解を知る必要がある. 本研究では, 頂点価格付け問題を整数計画問題として定式化し, 既存の整数計画ソルバーを用いて最適解を計算する. 整数計画ソルバーでは目的関数と条件式は線形でなければならないが, 問題の目的関数は非線形であり, このままでは整数計画ソルバーを利用できない. これを人工変数を用いることで解決し, 目的関数を線形で表現する.

頂点価格付け問題は以下のように整数計画問題 (IP) へと定式化できる。

*東北大学
†第1著者に同じ

頂点価格付け問題

- 最大化: $\sum_{j=1}^{m} y_j$
- 条件: $y_j \le p(S_j)$

$$y_j \le w_j \times x_j$$
$$p(S_j) \le w_j \times x_j + M \times (1 - x_j)$$
$$x \in \{0, 1\}$$
$$p_i \ge 0,\ \ y_j \ge 0$$

M は十分大きな正数 (定数)

定式化からわかる重要な点は, 商品セットを購入する消費者が固定できた時, $x \in \{0,1\}$ が定まるのでこの問題は線形計画問題として扱うことができるという点である.

3 既存の近似アルゴリズムの改良

定式化より得られた知見を元に既存の近似アルゴリズムを改良する. 近似アルゴリズムを用いて問題を解いた時, 商品の価格が決定されるので, 商品を購入する消費者も併せて定まる. この時, 購入者に対して価格は最適化されてはいないので, 定式化において購入者を $x_j = 1$, その他の消費者を $x_j = 0$ として得られる線形計画問題を解くことで価格を最適化し, 解を改善する.

4 新たな近似アルゴリズムの提案

購入者を決定した時の最適な価格は高速に得られる, という知見から, 購入者を繰り返し追加する貪欲法に基づくアルゴリズム, 購入者の追加・削除・入替を繰り返す局所探索に基づくアルゴリズムの2つの新しいアルゴリズムを提案し, 実験により評価する. 結果は図 4.1 のとおりである.

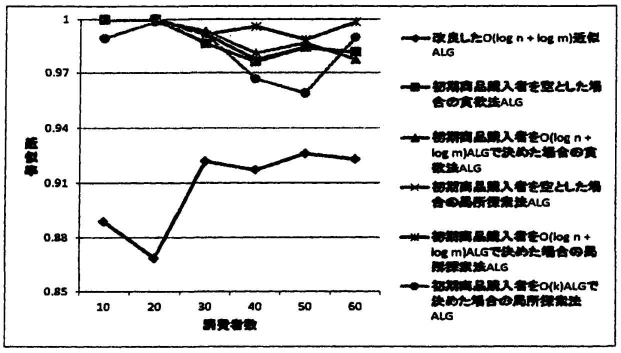

図 4.1. 各解法の商品数 20, 消費者 10〜60, k=3 の平均近似率

5 結論

本論文では, 頂点価格付け問題に対する実用的な近似アルゴリズムを提案した. 論文ではまず, 問題を整数計画問題として定式化して考察を行い, 得られた知見を元に既存の近似アルゴリズムを改良した. 次に, 貪欲法, 局所探索法に基づく新しい2つの近似アルゴリズムを提案し, 得られたアルゴリズムの性能を実験により評価した.

実験の結果から, 局所探索法アルゴリズムは良い近似解を求められるが時間がかかり, 貪欲法アルゴリズムは局所探索法より近似率は悪いが高速に計算できることがわかった. 実用的には, 良い近似アルゴリズムによって初期商品購入者を決定し, 貪欲法アルゴリズムによって高速に解くことが有効であることがわかった.

今後の課題としては, より良いヒューリスティックの提案, 提案したアルゴリズムの解析が挙げられる.

参考文献

[1] M-F. Balcan, A. Bulm. Approximation Algorithms and Online Mechanisms for Item Pricing, *Theory of Computing*, Vol.3, pp.179-195, 2007.

[2] P. Briest, P. Krysta. Single-Minded Unlimited Supply Pricing on Sparse Instances, *Proc. SODA*, pp.1093-1102, 2006.

[3] A. Goldberg, J. Hartline, A. Wright. Competitive Auctions and Digital Goods, *Proc. SODA*, pp.735-744, 2001.

[4] V. Guruswami, J.D. Hartline, A.R. Karlin, D. Kempe, C. Kenyon, F. McSherry. On Profit-Maximizing Envy-free Pricing, *Proc. SODA*, pp.1164-1173, 2005.

[5] R. Khandekar, T. Kimbrel, K. Makarychev, M. Sviridenko. On Hardness of Pricing Items for Single-Minded Bidders, *Proc. APPROX*, pp. 202-216, 2009.